Wyprowadźmy wzory pozwalające rozwiązać równania kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Aby znaleźć sposób rozwiązania dowolnego równania kwadratowego, sprowadźmy jego lewą stronę do postaci kanonicznej:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0.$$

Aby rozwiązać to równanie, przekształcamy je do postaci

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a},$$

Dzielimy obie strony przez $a \neq 0$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Rozpatrzmy teraz następujące przypadki:

1) Jeśli $\Delta > 0$, to $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, więc

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2,$$

a zatem

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

stąd

$$\boldsymbol{x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \textbf{lub} \quad \boldsymbol{x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

2) Jeśli $\Delta = 0$, to

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{0}{4a^2} \quad czyli \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

stąd

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \;\; czyli \;\; x = \frac{-b}{2a}.$$

3) Jeśli $\Delta < 0$, to równanie $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ nie ma rozwiązania, gdyż po lewej stronie
jest liczba nieujemna , natomiast po prawej stronie jest liczba ujemna
(bo $4a^2 > 0, \Delta < 0$).